Aufgabe 1: Wachstumsprozess – Der Biber kehrt zurück! (24P)

1867 wurde der letzte oberösterreichische Biber an der Salzach erlegt. Mehr als 100 Jahre galt er als ausgestorben. Rund um 1980 wurden östlich von Wien 45 Biber ausgesetzt, 1996 wurden schließlich wieder erste Biberspuren im Machland entdeckt! (Startpopulation = 10 Biber)
Diese Population in der Region Machland ist bis heute (2009) auf ca. 50 Individuen angewachsen.

Ein Arbeitsunfall….

Die Frage die sich nun stellt, ist unweigerlich folgende: *Auf welche Weise entwickelt sich die Biberpopulation weiter?*

a. Unter der Annahme, dass die Zunahme der Population zur momentanen Populationsgröße proportional ist, also $N'(t) = k \cdot N(t)$ gilt, wächst der Biberbestand exponentiell. Zeige, dass die Lösung dieser DGL durch $N(t) = N_0 \cdot e^{k \cdot t}$ mit dem AWP $N(0) = N_0$ gegeben ist. Berechne weiters die Wachstumskonstante k für die Biberkolonie im Machland. **(6P)**

b. Es könnte allerdings auch sein, dass sich die Population in den nächsten Jahren linear weiter entwickelt, also $N(t) = k \cdot t + d$ gilt. Stelle auch hierfür das Wachstumsmodell auf, indem du die Konstanten k und d berechnest. **(2P)**

c. Skizziere **qualitativ** beide Wachstumsgesetze in dasselbe Koordinatensystem! Worin liegt der grundlegende Unterschied in der Zuwachsrate zwischen exponentiellem Wachstum und linearem Wachstum? **(4P)**

d. Wie hoch ist der jährliche prozentuelle Zuwachs, wenn man exponentielles Wachstum zugrunde legt? **(1P)**

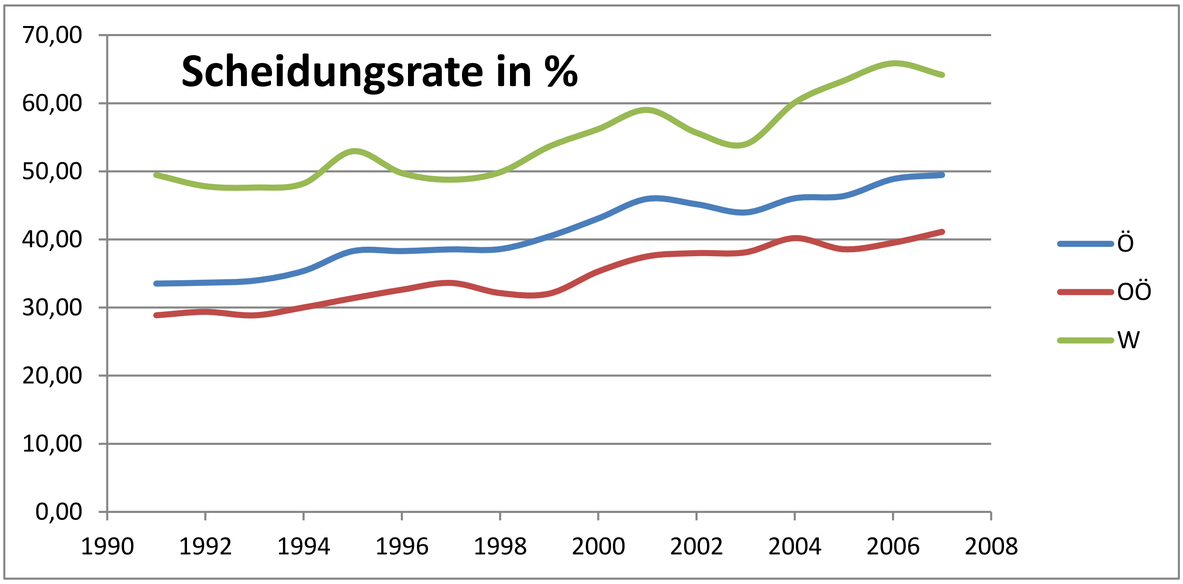
e. Berechne für beide Modelle, wann der 100 – ste Biber das Machland bevölkert. **(4P)**

f. Um wie viel unterscheiden sich die beiden Prognosen im Jahr 2015? **(3P)**

g. In 2 Jahren sollen 30 Biber erlegt werden, um das Wachstum einzudämmen. Wann erreicht die Population bei exponentiellem Wachstum wieder den heutigen Wert? **(4P)**

Aufgabe 2: Wahrscheinlichkeitsrechnung „Jede 2. Ehe wird geschieden" (19P)

Folgende Graphik gibt die Entwicklung der Scheidungsrate der letzten Jahre wider.
(Quelle: Statistik Austria, Daten vom 25. 09. 2008)



Die Gesamtscheidungsrate gibt an, wie groß der Prozentsatz der Ehen ist, die durch eine Scheidung (und damit nicht durch den Tod eines der beiden Ehepartner) enden. Basis für die Berechnung der Gesamtscheidungsrate sind die im jeweiligen Jahr beobachteten Scheidungen, die in Beziehung zu jenen Eheschließungsjahrgängen gesetzt werden, aus denen sie stammen (ehedauerspezifische Scheidungsraten).

a. Analysiere die Graphik. Wie ist die Aussage „Jede zweite Ehe wird geschieden" zu interpretieren? Worin liegt die Problematik bei statistischen Mittelwertaussagen? **(2P)**

b. Um wie viel Prozent ist die Scheidungsrate in OÖ von 1991 bis 2007 gestiegen? **(1P)**
(Nehme auf Zehner gerundete Werte zur Berechnung)

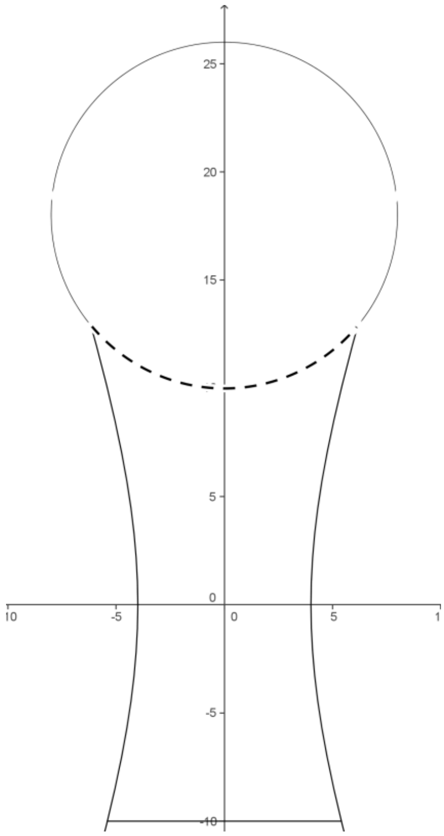
c. Wir übertragen nun die auf Zehner gerundete Scheidungsrate von OÖ aus dem Jahre 2007 auf die 30 Schülerinnen und Schüler der 8. Klassen des Europagymnasiums. Wir nehmen an, dass die Hälfte von ihnen vor den Traualtar treten wird. Berechne nun folgende Werte:

- WK, dass höchstens 3 Scheidungen eintreten? **(3P)**

- WK, dass mindestens eine Scheidung eintritt? **(1P)**

d. Nun nehmen wird an, dass Baumgartenberg mit etwa $n = 350$ Ehepaaren eine durchschnittliche, oberösterreichische Gemeinde ist.

- Berechne Erwartungswert μ und Standardabweichung σ für die Scheidungszahl in BGB. **(2P)**
- Ermittle die WK, dass höchstens 120 Scheidungen erfolgen. **(2P)**
- Berechne die WK, dass es zu zumindest 150 Scheidungen kommt. **(2P)**
- Wie groß ist die WK, dass die Anzahl der Scheidungen um höchstens 7 vom Sollwert abweicht? **(2P)**
- In welchem symmetrischen Intervall um den Mittelwert liegen 95% der Scheidungen? **(2P)**
- Welche Scheidungsanzahl wird zu 67% zumindest erreicht? **(2P)**



Aufgabe 3: Integralrechnung – Kegelschnitte (24P)

Der FIFA WM Pokal besteht im Wesentlichen aus einem hyperboloidförmigen Sockel und einem kugelförmigen oberen Ende. Näherungsweise lässt sich der Pokal durch Rotation einer Hyperbel in erster Hauptlage und eines Kreises um die y – Achse darstellen.

Die Höhe des gesamten Pokals beträgt $h = 36$ cm. Die Hyperbel in 1HL geht durch die Punkte $P(4/0)$ und $Q(5/8{,}25)$. Der Kreis ist durch die Punkte $A(0/26)$ und $B(-8/18)$ bestimmt.

a) Bestimme die Gleichung der Hyperbel in 1.HL und des Kreises. **(8P)**
b) Bestimme das Volumen des Pokals.**(5P)**
c) Berechne die Masse (in kg) des Pokals, wenn der Pokal aus 18 karätigem Gold ($\rho=19{,}32$ g/cm^3) bestehen würde. **(3)**
d) Die tatsächliche Masse beträgt 6,175kg. Wie viel Prozent des Pokals sind hohl? **(3)**
e) Die 6,175 kg Gold werden nun eingeschmolzen und es wird eine Klangschale daraus produziert. Die Schale wird durch zwei Parabeln p_1: $x^2=40y$ und p_2: $y=0.04x^2 + 3$ begrenzt. Wie hoch ist die Schale? **(5)**

Aufgabe 4: Trigonometrie (15P)

Von der 35m über dem Meeresniveau liegenden Plattform eines Leuchtturms werden 2 Küstenpunkte A und B vermessen. A sieht man von der Plattform aus unter einem Tiefenwinkel von 3,7°, nach dem Schwenken des Instrumentes um den Horizontalwinkel von 146,8° sieht man B unter dem Tiefenwinkel von 4,9°.

a) Berechne die Entfernung von A nach B. **(6)**
b) Genau über A schwebt ein Ballon. Diesen sieht man von der Plattform aus unter einem Höhenwinkel von 32,7°. Wie hoch schwebt der Ballon über Punkt A? **(3)**
c) Unter welchem Tiefenwinkel sieht man B vom Ballon aus? **(3)**
d) Wie weit ist der Ballon von B entfernt? **(3)**

Aufgabe 5: dreidimensionale Koordinatengeometrie (18P)

Ein Maibaum wird an den drei Punkten A, B und C fixiert (alle Angeben in Meter). Der Baum ist von allen Eckpunkten gleich weit entfernt. Die Höhe des Baums beträgt 20m.

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Berechne den Fußpunktes und der Spitze des Baums **(11P)**
b) Welchen Winkel schließt das Seil am Punkt A mit der Grundebene ein **(2P)**
c) Wie groß ist der Flächeninhalt des von den drei Fixierungspunkten aufgespannten Dreiecks ABC. **(2P)**
d) Berechne die gesamte Länge des Fixierungsseils. **(3P)**

Allgemeine Bemerkungen:

Alle Rechenschritte müssen nachvollziehbar sein!
Die Rechenergebnisse sind auf 2 Nachkommastellen zu runden,
Wahrscheinlichkeitsergebnisse sind auf 4 Stellen anzugeben.

Verwendete Hilfsmittel:

Taschenrechner (Voyage 200)
Mathematische Formelsammlung (Kraft, Bürger, Unfried, Götz)
Zirkel, Lineal, Geodreieck

Punkteschlüssel:

100 - 92 Sehr gut
91 - 80 Gut
79 - 61 Befriedigend
60 - 50 Genügend
49 - 0 Nicht genügend